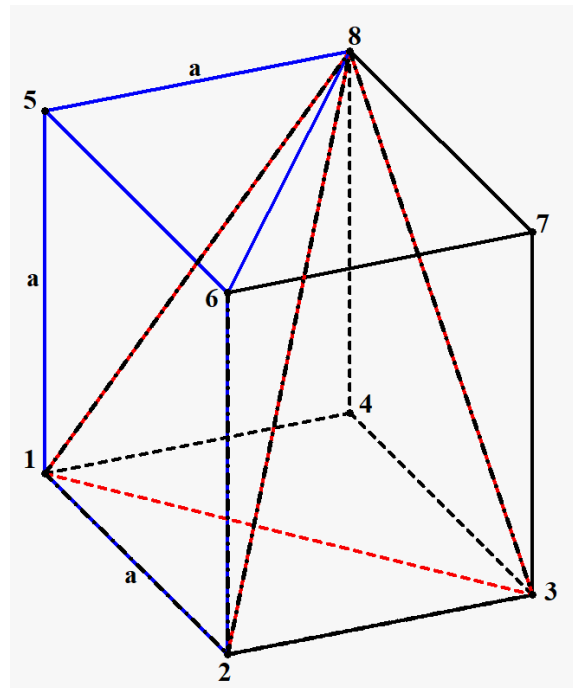


Hogyan lehet egy kockát három egybevágó gúlára bontani

Jobb későn, mint soha. Ezt szokták az ilyen esetekben mondani.

Vegyünk egy a élhosszúságú kockát – 1. ábra!



1. ábra

Induljunk ki az **1348** tetraéder térfogatából! Ez:

$$V_{1348} = \frac{1}{3} \cdot T \cdot d, \quad T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a \cdot (\sqrt{2} \cdot a \cdot \sin 60^\circ),$$

$$V_{1348} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a \cdot (\sqrt{2} \cdot a \cdot \sin 60^\circ) \cdot \frac{1}{3} \cdot d = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot d = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \cdot a^3,$$

tehát:

$$V_{1348} = \frac{1}{6} \cdot a^3. \quad (1)$$

Az **12348** gúla térfogata 2 darab **1348** tetraéder térfogatával egyenlő, mert alapterületük, az **123** háromszög területe egyenlő az **134** háromszög területével, a magasságuk pedig a , így:

$$V_{12348} = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot a^3 = \frac{1}{3} \cdot a^3, \quad (2)$$

vagyis 3 ilyen gúla térfogata kiadja a kocka térfogatát. A 3 gúla piros, kék és fekete színnel lett jelölve az 1. ábrán; mindegyikük alapja négyzet, és a négyzet fölötti csúcsuk a **8** pont. Látható, hogy a 3 gúla egybevágó. Ezzel az igazolást befejeztük.

Megjegyzések:

M1. Előző dolgozatainkból (is) ismert – ld. pl.: *) – , hogy egy sík (merőleges) távolsága az origótól az

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2} \quad (3)$$

képlettel számítható ki. Mivel itt:

$$u = v = w = a , \quad (4)$$

így:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{3}{a^2} \rightarrow d^2 = \frac{a^2}{3} \rightarrow \underline{d = \frac{a}{\sqrt{3}}} . \quad (5)$$

M2. A **d** tetraéder - magasság nem a kocka testátlójának fele!

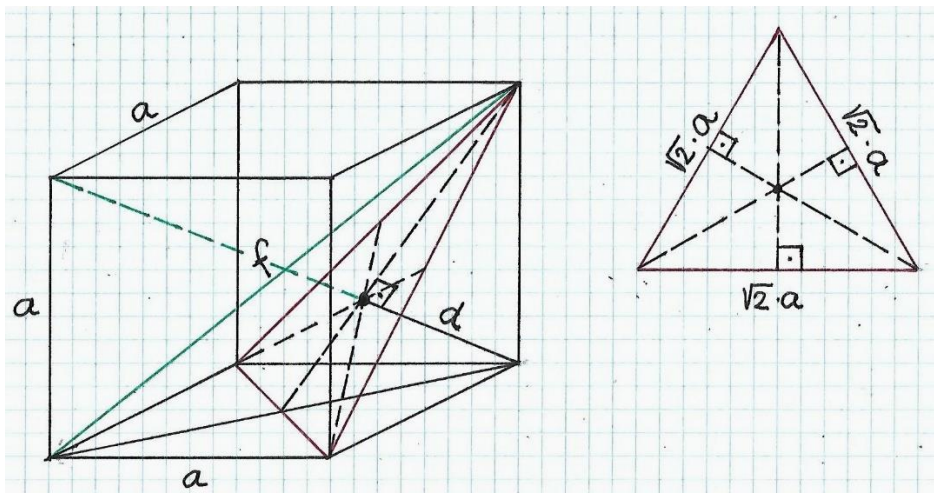
Ugyanis a kocka **f** testátlójára *Pitagorász* tételével:

$$f^2 = 3 \cdot a^2 \rightarrow \underline{f = \sqrt{3} \cdot a} , \quad (6)$$

így (5) és (6) - tal:

$$\frac{f}{d} = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 3 \rightarrow f = 3 \cdot d \rightarrow \underline{d = \frac{f}{3}} . \quad (7)$$

A **d** tetraéder - magasság tehát az **f** testátló egyharmada – 2. ábra.



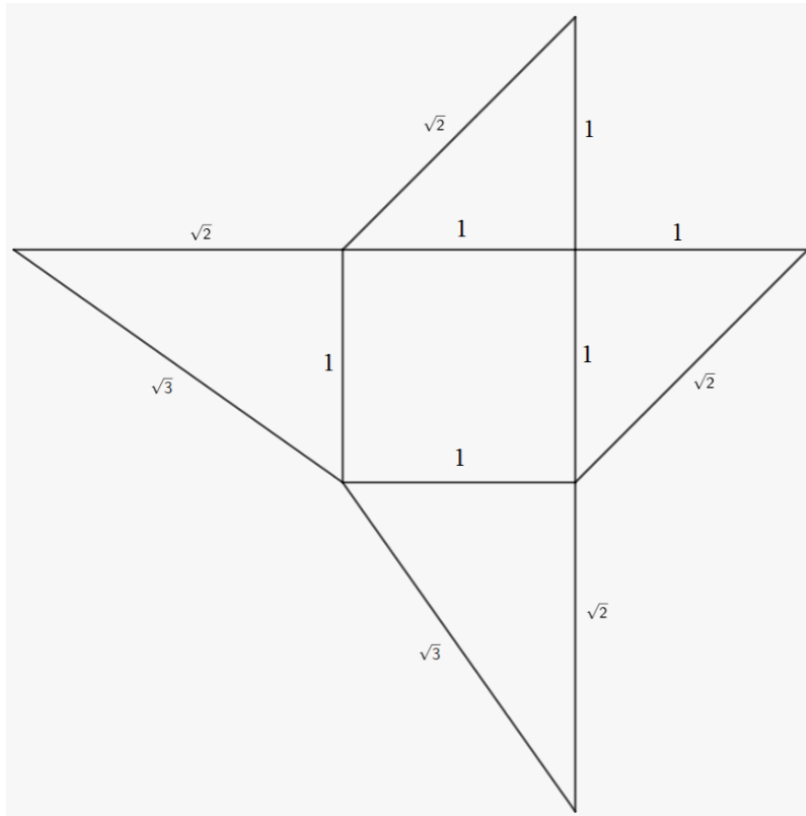
2. ábra

Az viszont érdekes, hogy **d** az **f** egyenesén nyugszik – lásd a szaggatott vonalú testátlót!

Hogy ez így van, azt az érdeklődő Olvasó mutassa ki!

Ezt azért részleteztük, mert a lustaság csábító: nem nézünk utána dolognak és tévesztünk!

M3. A harmad - gúla hálója a 3. ábra szerinti.



3. ábra – forrás: [1]

M4. Egyszerűbben is ki lehetett volna számítani a fél - gúla térfogatát:

$$V_{1348} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{1}{6} \cdot a^3 ; \quad (8)$$

akkor azonban nem tudtunk volna kitérni **d** - re.

M5. Ha már itt tartunk, akkor nézzük meg a **d** tetraéder - magasság kérdését téglatestre!

Ekkor az **a , b , c** derékszögű tetraéderre – (3) szerint – :

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \rightarrow \frac{1}{d} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} . \quad (9)$$

Az **a , b , c** téglatest **f** testátlójára:

$$f = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} , \quad (10)$$

a kettő arányára pedig:

$$\underline{\underline{\frac{f}{d} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} .}} \quad (11)$$

Ha $a = b = c$, akkor (11) -ből:

$$\frac{f}{d} = \sqrt{3 \cdot a^2} \cdot \sqrt{\frac{3}{a^2}} = 3 , \quad (12)$$

mint előbb is.

Ajánlott olvasmány:

*) [Egy tergeometriai feladat.pdf \(galgoczi.net\)](#)

Forrás:

[1] – <https://ehazi.hu/gallery/answer/2583>

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
ny. mérnök tanár

Szödliget, 2024. 09. 21.

Továbbiak: www.galgoczi.net